

Some Inverses on Generalized k-idempotent Pent partitioned Neutrosophic Fuzzy Matrices

C. Arun Mozhi Devi^{1*} and T. Anitha²

¹Research Scholar, Department of Mathematics, Annamalai University, Annamalai Nagar – 608 002.

¹Associate Professor, Department of Mathematics, P. T. Lee Chengalvaraya Naicker College of Engineering and Technology, Ooveri, Kanchipuram – 631 502

²Assistant Professor, Department of Mathematics, Annamalai University, Annamalai Nagar – 608 002 (Deputed to Alagappa Chettiar Govt. College of Engineering and Technology, Karaikudi – 630 003)

¹arunmozhi31@gmail.com and ²anitha81t@gmail.com

*Corresponding author: arunmozhi31@gmail.com

Received: 14th June, 2026; Revised: 20th July 2026; Accepted: 20th August, 2026; Available Online: 05th September 2026

ABSTRACT

This paper investigates the **Moore–Penrose inverse of k-idempotent Pentapartitioned Neutrosophic Fuzzy Matrices (PNFMs)**. The existence and uniqueness of the Moore–Penrose inverse are established, and its fundamental algebraic properties are studied within the framework of **PNFMs**. Several characterization theorems for k-idempotent **PNFMs** are derived, and the relationships between the Moore–Penrose inverse and other generalized inverses, including the group inverse, are investigated. The proposed results extend the classical theory of generalized inverses to the **PNFMs** setting, providing a comprehensive algebraic framework for matrices involving truth, indeterminacy, falsity, hyper-soft parameters, and rough approximations.

Keywords: k – idempotent PNFMs, PNFMs, Moore – Penrose inverse, group inverse and Drazin inverse.

How to cite this article: Arun Mozhi Devi C, Anitha T, Some Inverses on Generalized k-idempotent Pentapartitioned Neutrosophic Fuzzy Matrices. Int J Drug Deliv Technol. 2026; 16(7): 1697-1717. DOI: 10.25258/ijddt.16.7.184

Source of support: Nil.

Conflict of interest: None

INTRODUCTION

Matrix theory plays an important role in several branches of mathematics and its applications, particularly in linear algebra, optimization, decision-making, control theory, computer science, and data analysis. The study of generalized inverses of matrices has received considerable attention because generalized inverses extend the concept of the ordinary inverse to singular and non-square matrices. One of the fundamental developments in this direction was presented by Greville [2], who investigated generalized inverses associated with matrix products. Pearl [8] further contributed to the theory of generalized inverses and established important results concerning their algebraic properties. The systematic treatment of generalized inverses and their applications was subsequently developed by Rao and Mitra [11]. These classical investigations provide the mathematical foundation for studying different types of generalized inverses and their extensions to various generalized matrix structures.

The concept of fuzzy matrices was introduced to represent imprecise and uncertain information in matrix form. Kim and Roush [13] developed the theory of generalized fuzzy matrices, thereby providing a framework for extending several classical matrix concepts to fuzzy environments. Meenakshi [24] presented a comprehensive treatment of fuzzy matrix theory and its applications. The study of inverses and idempotent properties in fuzzy matrices has also attracted considerable interest. Kim [21] investigated

idempotents and inverses in fuzzy matrices, while Lee, Jeong, and Park [19] studied idempotent fuzzy matrices. These investigations demonstrate that classical algebraic properties can be meaningfully generalized within fuzzy matrix structures.

The theory of generalized inverses has subsequently been extended to intuitionistic fuzzy matrices, in which membership and non-membership information are considered simultaneously. Sriram and Murugadas [3] investigated the Moore–Penrose inverse of intuitionistic fuzzy matrices. Several other algebraic concepts associated with generalized inverses and partial orderings have also been studied in intuitionistic fuzzy settings. Anandhkumar et al. [12] investigated reverse tilde and minus partial orderings on intuitionistic fuzzy matrices, while Punithavalli and Anandhkumar [22] studied reverse sharp and left-(T) right-(T) partial orderings. Punithavalli and Anandhkumar [26] further investigated kernel and (k)-kernel symmetric intuitionistic fuzzy matrices. These studies illustrate the continuing development of inverse theory and related structural properties in generalized fuzzy matrix environments.

The concept of (k)-idempotency provides another important direction in the study of generalized matrix structures. A matrix (A) is said to be (k)-idempotent when it satisfies an algebraic relation of the form $A^{\{k+1\}} = A$, for a positive integer (k). Such matrices generalize the classical idempotent matrices, for which $(A^2 = A)$. Krishnamoorthy and

*Author for Correspondence: arunmozhi31@gmail.com

Rajagopalan [5] investigated generalized inverses of (k) -idempotent matrices, establishing a connection between (k) -idempotency and generalized inverse theory. The (k) -idempotent concept has subsequently been investigated in fuzzy and neutrosophic environments. Anandhkumar et al. [18] studied partial orderings, characterizations, and generalizations of (k) -idempotent neutrosophic fuzzy matrices. These developments provide a natural algebraic foundation for investigating generalized inverses of (k) -idempotent neutrosophic fuzzy matrices.

Neutrosophic theory was introduced to provide a mathematical framework for handling indeterminate, inconsistent, and incomplete information. Neutrosophic fuzzy matrices consequently offer greater flexibility than conventional fuzzy matrices by incorporating truth, indeterminacy, and falsity information. Anandhkumar et al. [1] investigated pseudo similarity of neutrosophic fuzzy matrices, while Anandhkumar et al. [4] studied various inverses of neutrosophic fuzzy matrices. Generalized symmetric structures were considered by Anandhkumar et al. [9], who investigated generalized symmetric neutrosophic fuzzy matrices. Further developments include reverse sharp and left- (T) right- (T) partial orderings on neutrosophic fuzzy matrices [7], interval-valued secondary (k) -range symmetric neutrosophic fuzzy matrices [14], and secondary (k) -column symmetric neutrosophic fuzzy matrices [20]. These investigations have considerably enriched the algebraic theory of neutrosophic fuzzy matrices.

The relationship between inverse theory and structural properties such as idempotency, range symmetry, and kernel symmetry has also been explored. Anandhkumar et al. [23] studied secondary (k) -range symmetric neutrosophic fuzzy matrices, whereas Prathab et al. [27] investigated interval-valued secondary (k) -range symmetric fuzzy matrices with generalized inverses. Anandhkumar et al. [18] provided characterizations and generalizations of (k) -idempotent neutrosophic fuzzy matrices. In addition, generalized symmetric Fermatean neutrosophic fuzzy matrices were investigated by Anandhkumar et al. [25]. These studies indicate that generalized inverse theory can be combined with different symmetry and algebraic conditions to develop new classes of fuzzy and neutrosophic matrix structures.

More recently, partitioned neutrosophic fuzzy matrices have emerged as an important extension for representing information with multiple semantic components. Quadri-partitioned neutrosophic fuzzy matrices provide a richer framework than conventional neutrosophic fuzzy matrices by partitioning the information into four components. Determinant theory for quadri-partitioned neutrosophic fuzzy matrices and its application to multi-criteria decision-making problems was investigated by Anandhkumar et al. [28]. Radhika et al. [10] studied the Schur complement in (k) -kernel symmetric block quadri-partitioned neutrosophic fuzzy matrices. Interval-valued secondary (k) -range symmetric quadri-partitioned neutrosophic fuzzy matrices with decision-making applications were investigated by Radhika et al. [29]. These contributions demonstrate the applicability of partitioned neutrosophic fuzzy matrix structures to algebraic and decision-making problems.

The development of partitioned structures has naturally led to the consideration of pentapartitioned neutrosophic fuzzy matrices. A pentapartitioned representation provides five distinct information components, commonly associated with truth, contradiction, ignorance/indeterminacy, unknown, and falsity information. This richer representation enables more detailed modeling of information containing uncertainty, inconsistency, incompleteness, and indeterminacy. In comparison with ordinary neutrosophic fuzzy matrices, pentapartitioned structures therefore provide an extended algebraic framework in which different information components can be treated separately.

The study of compositions and algebraic operations in neutrosophic fuzzy matrices has further strengthened the mathematical foundations of these generalized structures. Harikrishnan et al. [30] investigated $\text{Min}(\text{Max})$ – $\text{Min}(\text{Max})$ – $\text{Max}(\text{Min})$ compositions of neutrosophic fuzzy matrices and demonstrated their application to medical diagnosis. Similarly, decomposition of neutrosophic fuzzy matrices using α -cuts was investigated by Devi Shyamala Mary et al. [16]. These developments indicate that neutrosophic fuzzy matrix theory is expanding beyond basic matrix operations toward more sophisticated algebraic constructions and applications.

Although generalized inverses have been studied for conventional matrices, fuzzy matrices, intuitionistic fuzzy matrices, and neutrosophic fuzzy matrices, the investigation of inverse structures in **generalized (k) -idempotent pentapartitioned neutrosophic fuzzy matrices** remains comparatively limited. In particular, there is a need to establish suitable inverse concepts for pentapartitioned structures satisfying generalized (k) -idempotent conditions and to investigate the algebraic relationships among these inverses. The transition from ordinary neutrosophic fuzzy matrices to pentapartitioned neutrosophic fuzzy matrices introduces additional structural components, which necessitates an appropriate formulation of inverse conditions and their corresponding characterizations.

Motivated by these observations, the present study focuses on **some inverses on generalized (k) -idempotent pentapartitioned neutrosophic fuzzy matrices**. The main objective is to develop an algebraic framework for studying generalized inverse structures associated with (k) -idempotent pentapartitioned neutrosophic fuzzy matrices. The study investigates the relevant inverse conditions, establishes their existence and algebraic properties under suitable assumptions, and derives relationships between the generalized (k) -idempotent structure and the corresponding inverses. The proposed framework extends existing results on generalized inverses, (k) -idempotent matrices, neutrosophic fuzzy matrices, and partitioned neutrosophic fuzzy matrices [2,4,5,11,18,28].

Thus, the present work contributes to the development of inverse theory for a more expressive class of neutrosophic fuzzy matrices. In particular, it provides a foundation for further investigations involving generalized inverses, Moore–Penrose-type inverses, group inverses, partial orderings, symmetry properties, and potential applications of pentapartitioned neutrosophic fuzzy matrices in uncertainty-based mathematical modeling and decision-making.

2. Moore-Penrose Inverse Idempotent PNFMs

Definition:2.1 For PNFMs $(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P) \in F_{mn}$ and another PNFMs, $(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^T \in F_{nm}$ is called Moore Penrose inverse of $(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)$ if

- (i) $(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P) \left((T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^T \right) (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P) = (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)$ {g-inverse or {1}- inverse}
- (ii) $\left((T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^T \right) (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P) \left((T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^T \right) = \left((T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^T \right)$ {reflexive g- inverse or {2}- inverse}
- (iii) $\left((T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P) \left((T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^T \right) \right)^T = (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P) \left((T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^T \right)^T$ { {3}- inverse}
- (iv) $\left(\left((T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^T \right) (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P) \right)^T = \left((T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^T \right) (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)$ { {4}- inverse}

An inverse which satisfies all the above four equations, is called Moore Penrose inverse of $(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)$ is denoted by $(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^+$

Theorem: 2.1 If $(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^{(1)}$ is a (1)-inverse (generalized inverse) of a k-idempotent PNFMs of $(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)$ then

- (i) $\left((T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^2 \right)^{(1)} = K (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^{(1)} K$
- (ii) $\left(K (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P) \right)^{(1)} = (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^{(1)} K$
- (iii) $\left((T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P) K \right)^{(1)} = K (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^{(1)}$
- (iv) $\left((T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^3 \right)^{(1)} = (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P) (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^{(1)} (or) (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^{(1)} (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)$

$$(v) \left(K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \right)^{(1)} = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1)} K \text{ (or)} \\ \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1)} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) K$$

Proof: (i) $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 [K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1)} K]$

$$\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1)} K \\ \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2$$

$$= K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1)} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) K$$

$$= K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) K$$

$$\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 [K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1)} K] \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2$$

$$= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2$$

(ii) $K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) [\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1)} K] K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$

$$= K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1)} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$$

$$= K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$$

(iii) $K [K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1)}] \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) K = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$

$$\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1)} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) K = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) K$$

(iv) $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 [\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1)}]$

$$\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$$

$$\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1)} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 =$$

$$\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 =$$

$$\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3$$

In a similar manner, it can be proved that

Therefore, $\left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \right)^{(1)} = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1)} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$

(v) $K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 [\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1)} K]$

$$K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 = K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1)}$$

$$\begin{aligned}
& \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^{(1)} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^3 \\
&= K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^{(1)} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right) \\
&\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^2 = K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^3
\end{aligned}$$

$$\text{Therefore, } \left(K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^3\right)^{(1)} = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^{(1)} K$$

In a similar manner, it can be proved that

$$\left(K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^3\right)^{(1)} = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^{(1)} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right) K.$$

Theorem: 2.2 If $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^{(2)}$ is a (2)-inverse (reflexive generalized inverse) of a k-idempotent PNFMs $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)$ then

- (i) $\left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^2\right)^{(2)} = K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^{(2)} K$
- (ii) $\left(K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\right)^{(2)} = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^{(2)} K$
- (iii) $\left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right) K\right)^{(2)} = K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^{(2)}$
- (iv) $\left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^3\right)^{(2)} = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^{(2)} \quad (\text{or})$
 $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^{(2)} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)$
- (v) $\left(K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^3\right)^{(2)} = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^{(2)} K \quad (\text{or})$
 $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^{(2)} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right) K$

Proof : The proof is comparable to that of Theorem 2.1.

Theorem 2.3 If $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)$ is a k-idempotent PNFMs then

$$\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^2 \in \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right) \{1, 2\}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Proof: (i) } \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^2 \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right) \\
&= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^4 \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^2 \\
&\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right) = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)
\end{aligned}$$

$$(\text{By } \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^4 = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right))$$

$$(ii) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^2 \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^5 \quad \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 \quad \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \\
 &\quad \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 \\
 &\quad (\text{By } \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 = I)
 \end{aligned}$$

From (i) and (ii), we have $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 \in \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \{1, 2\}$

Note 2.1 Using $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 \in \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \{1, 2\}$ in theorems 2.1 and 2.2 we have

$$\begin{aligned}
 &\left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 \right)^{(1,2)} = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right), \left(K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right)^{(1,2)} \\
 &= K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right), \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) K \right)^{(1,2)} = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) K, \\
 &\left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \right)^{(1,2)} = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3, \\
 &\left(K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \right)^{(1,2)} = K \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \right].
 \end{aligned}$$

It is also observed that each **PNFMs** X belongs to $\left\{ \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right), \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2, \right.$

$$\left. \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3, \right.$$

$$\left. K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right), \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) K, \right.$$

$$\left. K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \right\} \text{ commutes with their respective } (1,2)\text{-inverses.}$$

Theorem: 2.4 If $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,3)}$ is a least square generalized inverse of a k- idempotent **PNFMs** $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$ then

$$(i) \quad \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 \right)^{(1,3)} = K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,3)} K$$

$$(ii) \quad \left(K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right)^{(1,3)} = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,3)} K$$

$$(iii) \quad \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) K \right)^{(1,3)} = K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,3)}$$

$$(iv) \quad \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \right)^{(1,3)} = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,3)}$$

$$(v) \quad \left(K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \right)^{(1,3)} = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right)^{(1,3)} K$$

Proof: (i) $\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 K \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right)^{(1,3)} K \right]^T$

$$\begin{aligned}
&= [\mathbf{K} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,3)} \mathbf{K}]^T \\
&= \mathbf{K} \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,3)} \right]^T \mathbf{K} \\
&= \mathbf{K} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,3)} \mathbf{K} \\
&= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 \mathbf{K} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,3)} \mathbf{K} \\
\text{Therefore, } &\left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 \right)^{(1,3)} = \mathbf{K} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,3)} \mathbf{K}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii) } &[\mathbf{K} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,3)} \mathbf{K}]^T \\
&= \mathbf{K} \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,3)} \right]^T \mathbf{K} \\
&= \mathbf{K} \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,3)} \right] \mathbf{K} \\
&= \mathbf{K} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,3)} \mathbf{K} \right]
\end{aligned}$$

$$\text{Therefore, } \left(\mathbf{K} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right)^{(1,3)} = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,3)} \mathbf{K}$$

$$\begin{aligned}
\text{(iii) } &\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \mathbf{K} \mathbf{K} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,3)} \right]^T \\
&= \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,3)} \right)^T \\
&= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,3)} \\
&= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \mathbf{K} \left[\mathbf{K} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,3)} \right]
\end{aligned}$$

$$\text{Therefore, } \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \mathbf{K} \right)^{(1,3)} = \mathbf{K} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,3)}$$

$$\begin{aligned}
\text{(iv) } &\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,3)} \right]^T \\
&= \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,3)} \right)^T \\
&= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,3)} \\
&= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,3)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(v) } &[\mathbf{K} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,3)} \mathbf{K}]^T \\
&= [\mathbf{K} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,3)} \mathbf{K}]^T
\end{aligned}$$

$$= K \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,3)} \right)^T K$$

$$= K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,3)} K$$

$$= K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,3)} K \right]$$

$$\text{Therefore, } \left(K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \right)^{(1,3)} = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,3)} K$$

Theorem: 2.5 If $\left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right)^{(1,4)}$ is a minimum norm generalized inverse of a k-idempotent PNFMs $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$ then

$$(i) \quad \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 \right)^{(1,4)} = K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,4)} K$$

$$(ii) \quad \left(K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right)^{(1,4)} = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,4)} K$$

$$(iii) \quad \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) K \right)^{(1,4)} = K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,4)}$$

$$(iv) \quad \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \right)^{(1,4)} = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,4)} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$$

$$(v) \quad \left(K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \right)^{(1,4)} = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,4)} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) K$$

Proof: The proof of (i) to (iii) are analogous to that of (i) to (iii) proved in theorem 2.5

$$\begin{aligned} (iv) & \quad \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,4)} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left[\left(\underline{p}_{ij}^T, \underline{p}_{ij}^I, \underline{p}_{ij}^F \right); \left(\overline{p}_{ij}^T, \overline{p}_{ij}^I, \overline{p}_{ij}^F \right) \right]^3 \right]^T \\ &= \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,4)} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^T = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,4)} \\ & \quad \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \\ &= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,4)} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \right] \end{aligned}$$

$$\text{Therefore, } \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \right)^{(1,4)} = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,4)} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$$

$$(v) \quad \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,4)} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) K \right]^T$$

$$K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3]^T = \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,4)} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^T$$

$$= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,4)} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$$

$$= \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{(1,4)} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) K \right] K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3$$

Therefore, $\left(K\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^3\right)^{(1,4)} = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^{(1,4)} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right) K$

Theorem: 2.6 For PNFMs $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^+$ is the Moore Penrose inverse of a k-idempotent PNFMs then

- (i) $\left(\left[\left(\underline{p}_{ij}^T, \underline{p}_{ij}^I, \underline{p}_{ij}^F\right); \left(\overline{p}_{ij}^T, \overline{p}_{ij}^I, \overline{p}_{ij}^F\right)\right]^2\right)^+ = K \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\right]^+ K$
- (ii) $\left(K\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\right)^+ = \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\right]^+ K$
- (iii) $\left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right) K\right)^+ = K \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\right]^+$
- (iv) $\left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^3\right)^+ = \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\right]^+ \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^2 \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\right]^+$
- (v) $\left(K\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^3\right)^+ = \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\right]^+ \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^2 \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\right]^+ K$

Proof: Combining theorems 2.1, 2.2, 2.4 and 2.5 we see that the results (i) to (iii) can be easily proved.

(iv) Since $\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\right]^+$ is the Moore Penrose inverse of a k-idempotent PNFMs $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)$, we have $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^+ \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^+$ is a (1,3)-inverse of $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^3$ by theorem 2.4. Similarly $\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\right]^+ \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)$ is a (1,4)-inverse of A^3 by theorem 2.5

$$\begin{aligned} \text{But we have } & \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^+ = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^{(1,4)} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right) \\ & \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^{(1,3)} \\ & \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^3\right)^+ = \left(\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\right]^+ \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\right) \\ & \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^3 \\ & \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right) \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\right]^+\right) \\ & \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^3\right)^+ = \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\right]^+ \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^2 \\ & \left[\left(\underline{p}_{ij}^T, \underline{p}_{ij}^I, \underline{p}_{ij}^F\right); \left(\overline{p}_{ij}^T, \overline{p}_{ij}^I, \overline{p}_{ij}^F\right)\right]^+ \end{aligned}$$

(By $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^3 = I$)

we have $\left(K\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^3\right)^+ = I^+ \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^3\right)^+ K^+$

$$\begin{aligned}
&= I \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \right)^+ K \\
&= \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ K
\end{aligned}$$

Theorem: 2.7 For **PNFMs** $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$ be a k-idempotent **PNFMs**. If $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3$ is symmetric then $\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2$.

Proof: For **PNFMs** $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$ is a k-idempotent **PNFMs** such that

$$\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 \in \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \{1, 2\} \text{ (By theorem 2.3)}$$

$$\text{Also, } \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 \right)$$

$$= \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \right)^T = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3$$

$$= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2$$

$$\left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right)$$

$$= \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \right)^T = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3$$

$$= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$$

Hence, we have, then

$$\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2$$

Theorem: 2.8 For **PNFMs** $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$ be a k-idempotent **PNFMs**. Then

$$\left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \right)^+ \text{ commutes with the associated permutation matrix } K.$$

Proof: If A is a k-idempotent **PNFMs** then

$$K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 K$$

$$\left(K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \right)^+ = \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 K \right)^+$$

$$\left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \right)^+ K^+ = K^+ \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \right)^+$$

$$\text{Therefore, } \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \right)^+ K = K \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \right)^+$$

Theorem: 2.9 For **PNFMs** $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$ be a k-idempotent **PNFMs**. If $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$ is square symmetric then $\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^T$.

Proof: Since $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)$ is square symmetric then $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^2$
 $= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^T$.

Clearly $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^2 \in \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\{1,2\}$

It is true that $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^T$

$= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^T$ and

$\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^T\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)$

$= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^T\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)$

Therefore, we have $\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\right]^+ = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^T$

Theorem: 2.10 Let $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)$ be a k-idempotent PNFMs. If $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)$ is range symmetric then $\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\right]^+$ is also k-idempotent.

Proof: Assume that is range symmetric. We have

$\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^+$

$= \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\right]^+ \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right) \dots \dots (1)$

(1) $\left[\left(\underline{p}_{ij}^T, \underline{p}_{ij}^I, \underline{p}_{ij}^F\right); \left(\overline{p}_{ij}^T, \overline{p}_{ij}^I, \overline{p}_{ij}^F\right)\right]^2 \quad \left(\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\right]^+\right)^2 \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^2 =$
 $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)$

$\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\right]^+$

$\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\right]^+ \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)$

$= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\right]^+ \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right) \quad ($

$\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\right]^+ \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right) \quad [\text{By (1)}]$

$= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)$

$= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^2$

(2) $\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\right]^+ \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^2$

$$\begin{aligned}
& \left(\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \right) = \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \\
& \left(\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right) \\
& \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \right) \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \\
& = \left(\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \right) \\
& \left(\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \right) \quad [\text{By (1)}] \\
& = \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \\
& = \left(\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \right)^2 \\
& (3) \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 \left(\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \right)^2 \right]^T \\
& = \left(\left(\left(\underline{p}_{ij}^T, \underline{p}_{ij}^I, \underline{p}_{ij}^F \right); \left(\overline{p}_{ij}^T, \overline{p}_{ij}^I, \overline{p}_{ij}^F \right) \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \right) \\
& \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+)^T \\
& = \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right) \\
& \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+)^T \quad [\text{By (1)}] \\
& = \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right) \\
& \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+)^T \quad (\text{By} \quad \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \\
& \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) = \left(\left(\underline{p}_{ij}^T, \underline{p}_{ij}^I, \underline{p}_{ij}^F \right); \left(\overline{p}_{ij}^T, \overline{p}_{ij}^I, \overline{p}_{ij}^F \right) \right) \\
& = \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \right)^T \\
& = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \\
& = \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \right)^+ \quad \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \\
& \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \quad [\text{By (1)}] \\
& = \left[\left(\underline{p}_{ij}^T, \underline{p}_{ij}^I, \underline{p}_{ij}^F \right); \left(\overline{p}_{ij}^T, \overline{p}_{ij}^I, \overline{p}_{ij}^F \right) \right]^2 \left(\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \right)^2 \\
& (4) \left[\left(\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \right)^2 \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 \right]^T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right. \\
&\quad \left. \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right)^T \\
&= \left(\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \right. \\
&\quad \left. \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right)^T \quad [\text{By (1)}] \\
&= \left(\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right)^T \\
&\quad (\text{By } \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \\
&\quad = \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+) \\
&= \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \\
&= \left(\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \right) \\
&\quad \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \quad [\text{By (1)}] \\
&= \left(\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \right)^2 \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2
\end{aligned}$$

From (1) to (4), we see that

$$\left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 \right)^+ = \left(\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \right)^2 \quad \dots (2)$$

$$\text{Hence } \left[\left(\underline{p}_{ij}^T, \underline{p}_{ij}^I, \underline{p}_{ij}^F \right); \left(\overline{p}_{ij}^T, \overline{p}_{ij}^I, \overline{p}_{ij}^F \right) \right]^+ = \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+$$

$$= (\mathbf{K} \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 \mathbf{K})^+$$

$$\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ = \mathbf{K} \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 \right)^+ \mathbf{K}$$

$$\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ = \mathbf{K} \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^+ \right)^2 \mathbf{K} \quad [\text{By (2)}]$$

Theorem: 2.11 Let $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$ be a k-idempotent PNFMs. If $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$ is normal then is also k-idempotent.

Proof: If is normal then clearly $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$ is range symmetric

By theorem 2.10, $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^+$ is also k-idempotent.

3. Group inverse of k-idempotent matrix

Definition 3.1 For a k – idempotent PNFMs $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$, the group inverse of

$(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)$, denoted as $(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^\#$ is a commuting semi-inverse of $(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)$, that is,

$$\begin{aligned} & (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P) (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^\# (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P) \\ &= (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P) \quad , \quad (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^\# (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P) \\ & (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^\# = (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^\# \quad \text{and} \quad (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P) \\ & (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^\# \\ &= (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^\# (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P) \end{aligned}$$

Theorem 3.1 The group inverse of $(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^2$ is

$K (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^\# K$ if $(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^\#$ is the group inverse of a k-idempotent PNFMs $(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)$.

Proof: (1) $(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^2 (K (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^\# K) (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^2$

$$\begin{aligned} &= (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^2 K (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^\# K (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^2 \\ &= K (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P) (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^\# (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P) K \\ &= K (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P) K \\ &= (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^2 \\ &(2) (K (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^\# K) A^2 (K (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^\# K) \\ &= K (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^\# K \end{aligned}$$

by the definition, $(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P) = (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^2 (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^\# =$

$$(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^\# (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^2$$

Multiplying K^2 on both sides, $(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^2 (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^\# = (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^\#$

$$(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^2$$

(3) $K^2 ((T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^\# (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^2)$

$= ((T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^\# (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^2) K^2$

$(K (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^\# K) (T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P)^2$

$$= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 \left(K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{\#} K \right)$$

Therefore, $\left(K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{\#} K \right)$ is a group inverse of $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2$

Theorem 3.2 If $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{\#}$ is the group inverse of a k-idempotent **PNFMs** then

- (i) $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{\#} = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2$
- (ii) $\left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 \right)^{\#} = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$
- (iii) $\left(K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{\#} \right)^{\#} = K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$
- (iv) $\left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) K \right)^{\#} = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) K$
- (v) $\left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \right)^{\#} = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3$
- (vi) $\left(K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \right)^{\#} = K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3$

Proof: By theorem 2.3 we have .

For $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$ is a k-idempotent **PNFMs** then

$$\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 \in \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \{1, 2\}$$

$$\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2$$

$$= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$$

$$= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3$$

We have

$$\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{\#} = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2$$

By the note 2.1, we see that (ii) to (vi) can be easily proved.

Remark 3.1 For a square matrix of order n , Drazin defined a pseudo inverse X satisfying the following conditions

- (i) $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) X = X \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$
- (ii) $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^k = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{k+1} X$ for some positive integer k
- (iii) $X = X^2 \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$ -is known as commuting pseudo inverse of $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$ and it is denoted by $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)_{\text{Com}}$. The smallest positive integer k for which the above condition is satisfied, is called the index of $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$. It is true that exists and is unique.

Theorem 3.3 If $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)_{com}$ is the group inverse of a k-idempotent PNFMs then

- (i) $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)_{com}^3 = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^{\#} = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^2$
- (ii) $\left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)_{com}^2\right) = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)$
- (iii) $\left(K\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\right)_{com} = K\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)$
- (iv) $\left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)K\right)_{com} = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)K$
- (v) $\left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)_{com}^3\right) = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^3$
- (vi) $\left(K\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)_{com}^3\right) = K\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^3$

aProof (i) $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^2$
 $= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^3 = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^2 \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)$
 $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right) = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^4$
 $= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^2 \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^2.$

Hence the index of $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)$ is one.

$$\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^2 = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^5$$

$$= \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^2\right)^2 \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)$$

Therefore, $\left[\left(\underline{p}_{ij}^T, \underline{p}_{ij}^I, \underline{p}_{ij}^F\right); \left(\overline{p}_{ij}^T, \overline{p}_{ij}^I, \overline{p}_{ij}^F\right)\right]_{com} = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^2$

The proof of (ii) is similar to (i).

(iii) Clearly commutes with itself

Since is a tripotent matrix, we have

$$K\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right) = K\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)K$$

$$\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)K$$

$$= (K\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right))^2 K\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)$$

It follows that, $\left(K\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)\right)_{com} = K\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)$

The proof of (iv) is similar to (iii)

(v) Since $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P\right)^3$ is idempotent it is obvious that

$$\left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \right)_{com} = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3$$

(vi) $K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3$ commutes with itself.

Since $K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3$ is tripotent, we have

$$\begin{aligned} K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 &= K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 K \\ &\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \\ &= \left(K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \right)^2 K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \end{aligned}$$

$$\text{Therefore, } \left(K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \right)_{com} = K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3$$

Theorem 3.4 For PNFMs $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$ be a k-idempotent PNFMs. Then the following are equivalent.

- (i) $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$ is square symmetric
- (ii) $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3$ is symmetric
- (iii) $\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^\#$
- (iv) $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$ is range symmetric.

Proof: (1) implies (2)

$$\begin{aligned} A \text{ is square symmetric, } \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 &= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^T \\ \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 &= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^T \\ &\left(\left[\left(\underline{p}_{ij}^T, \underline{p}_{ij}^I, \underline{p}_{ij}^F \right); \left(\overline{p}_{ij}^T, \overline{p}_{ij}^I, \overline{p}_{ij}^F \right) \right]^3 \right)^T \\ &= \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^T \right)^T \\ &= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^T \\ &= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \end{aligned}$$

Therefore, $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3$ is symmetric

(2) implies (3) By theorem 2.7 we have

$$\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+$$

$$= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{\#} \quad (\text{by theorem 3.1})$$

(4) implies (3) A is range symmetric

$$\text{iff } \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{\#}$$

Theorem 3.5 For $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$ PNFMs be a k-idempotent PNFMs. If $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$ is cube symmetric then $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$ reduces to an idempotent PNFMs.

Proof: Since is cube Hermitian, we have

$$\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^T \dots\dots(1)$$

$$= \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \right)^T$$

$$= \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \right)^T \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^T$$

$$= \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^T \right)^T \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^T$$

$$= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^T$$

By theorem 3.3 , the matrix is square symmetric,

$$\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^T \dots\dots\dots(2)$$

From (1) and (2) implies , $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3$

$$= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2$$

$$\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2 = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$$

Therefore, $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$ is idempotent PNFMs.

Theorem 3.6 Let $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$ be a k-idempotent PNFMs. If $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$ is range symmetric then $K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$ and $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) K$ are also range symmetric.

Proof: If $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$ is range symmetric then $\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+$

$$= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^{\#} \quad (\text{By theorem 3.3})$$

$$\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^2$$

(By theorem 3.1)

$$\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ = K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) K \dots\dots(1)$$

$$\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ K = K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$$

$$\left(K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right)^+ = \left(K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right)^\#$$

(By theorem 3.1)

Therefore, $K \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$ is range symmetric

From (1)
$$K \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ = \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) K$$

$$\left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) K \right)^+ = \left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) K \right)^\#$$

Therefore, $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) K$ is range symmetric

Theorem 3.7 For PNFMs $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$ be a k-idempotent PNFMs. If $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$ is a range symmetric PNFMs then $\left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \right)^+$

$$= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+$$

Proof: If $\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$ is a range symmetric matrix then

$$\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+$$

$$= \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \dots\dots\dots(1)$$

By theorem 2.6, we have

$$\left(\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)^3 \right)^+ = \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$$

$$\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+$$

$$= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right)$$

$$\left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+ \text{ [By (1)]}$$

$$= \left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \left[\left(T_{ij}^P, C_{ij}^P, I_{ij}^P, U_{ij}^P, F_{ij}^P \right) \right]^+$$

4. CONCLUSION

In this paper, the Moore–Penrose inverse of k-idempotent PNFMs has been investigated. The existence and uniqueness of the Moore–Penrose inverse were established, and its fundamental algebraic properties were analyzed within the PNFMs framework. Several characterization theorems for k-idempotent PNFMs were obtained, highlighting the structural properties of these matrices. In addition, the relationships between the Moore–Penrose inverse and other generalized inverses, particularly the group inverse, were examined, thereby extending several classical results to the PNFMs environment.

The proposed framework provides a theoretical foundation for the study of generalized inverses of NHSRFMs and contributes to the algebraic development of PNFMs theory. Future research may focus on extending these results to other classes of generalized inverses, such as the core inverse, Drazin inverse, and weighted Moore–Penrose inverse, as well as exploring applications of PNFMs in multi-criteria decision-making, pattern recognition, image processing, medical diagnosis, and artificial intelligence.

REFERENCES

1. Anandhkumar, M., Kamalakannan, V., Chithra, S. M., & Said, B. (2023). Pseudo

- Similarity of Neutrosophic Fuzzy Matrices. *International Journal of Neutrosophic Science*, 20(4), 191–196.
2. Greville.T.N.E, “Note on the generalized inverse of a matrix products”, *SIAM Review*, 8, (1966) : 518 -521.
 3. S. Sriram and P. Murugadas” The Moore-Penrose Inverse of Intuitionistic Fuzzy Matrices” *Int. Journal of Math. Analysis*, Vol. 4, 2010, no. 36, 1779 – 1786.
 4. Anandhkumar, M., Kanimozhi, B., Chithra, S. M., Kamalakannan, V., & Said, B. (2023). On Various Inverse of Neutrosophic Fuzzy Matrices. *International Journal of Neutrosophic Science*, 21(2), 20–31.
 5. Krishnamoorthy.S and Rajagopalan.T, “Generalized inverses of k-idempotent matrices”, *Int.J.Comput.Appl.Math.*,vol.5, No.2, (2010) : 227- 231.
 6. Chanthirababu, S., Anandhkumar, M., & Venkatesh, A. (2026). Algebraic Properties of Kernel Symmetric Intuitionistic Fuzzy Matrices. *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 16(1), 32–47.
 7. Anandhkumar, M., Harikrishnan, T., Chithra, S. M., Kamalakannan, V., Kanimozhi, B., & Said, B. (2023). *Reverse Sharp and Left-T Right-T Partial Ordering on Neutrosophic Fuzzy Matrices*. *International Journal of Neutrosophic Science*, 21(4), 135–145.
 8. Pearl.M.H, “On generalized inverses of matrices”, *Proc. Cambridge phil. soc.* 62, (1966) : 673 -677
 9. Anandhkumar, M., Punithavalli, G., Soupramanien, T., & Said, B. (2023). *Generalized Symmetric Neutrosophic Fuzzy Matrices*. *Neutrosophic Sets and Systems*, 57.
 10. Radhika, K., Harikrishnan, T., Ambrose Prabhu, R., Tharaniya, P., John Peter, M., & Anandhkumar, M. (2025). *On Schur Complement in k-Kernel Symmetric Block Quadri Partitioned Neutrosophic Fuzzy Matrices*. *Neutrosophic Sets and Systems*, 78.
 11. Rao.C.R and Mitra.S.K, “Generalized inverse of matrices and its applications”, Wiley and sons, New York, 1971.
 12. Anandhkumar, M., Kanimozhi, B., Chithra, S. M., & Kamalakannan, V. (2023). *Reverse Tilde (T) and Minus Partial Ordering on Intuitionistic Fuzzy Matrices*. *Mathematical Modelling of Engineering Problems*, 10(4), 1427–1432.
 13. Kim,K.H and Roush.F.W., Generalised fuzzy matrices, *Fuzzy sets and systems* 4 : 293 – 315 (1980)
 14. Anandhkumar, M., Punithavalli, G., Jegan, R., & Said, B. (2023). *Interval Valued Secondary k-Range Symmetric Neutrosophic Fuzzy Matrices*. *Neutrosophic Sets and Systems*, 61.
 15. Punithavalli, G., & Anandhkumar, M. (2023). *Interval Valued Secondary k-Kernel Symmetric Fuzzy Matrices*. *Indian Journal of Natural Sciences*, 14(79).
 16. Devi Shyamala Mary, C., Kayelvizhi, C., Kalathian, S., Tharaniya, P., Anandhkumar, M., & Chithra, S. M. (2025). *Decomposition of Neutrosophic Fuzzy Matrices Using Some Alpha-Cuts*. *Neutrosophic Sets and Systems*, 86.
 17. Punithavalli, G., & Anandhkumar, M. (2023). *Some Inverses on Generalized Idempotent Intuitionistic Fuzzy Matrices*. *Indian Journal of Natural Sciences*, 14(80).
 18. Anandhkumar, M., Harikrishnan, T., Chithra, S. M., Kamalakannan, V., & Kanimozhi, B. (2024). *Partial Orderings, Characterizations and Generalization of k-Idempotent Neutrosophic Fuzzy Matrices*. *International Journal of Neutrosophic Science*, 23(2), 286–295.
 19. Hong Youl Lee, Nae Gyeong Jeong and Se Won Park, The idempotent Fuzzy matrices, *Honam Mathematical Journal* 26, pp 3 – 15 (2004).
 20. Anandhkumar, M., Punithavalli, G., & Janaki, E. (2024). *Secondary k-Column Symmetric Neutrosophic Fuzzy Matrices*. *Neutrosophic Sets and Systems*, 64.
 21. Kim J.B., Idempotents and inverses in Fuzzy matrices, *Malaysian Math* 6(2) , 57 – 61 (1983).
 22. Punithavalli, G., & Anandhkumar, M. (2024). *Reverse Sharp and Left-T Right-T Partial Ordering on Intuitionistic Fuzzy Matrices*. *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 14(4), 1772–1783.
 23. Anandhkumar, M., Prathab, H., Chithra, S. M., Prakaash, A. S., & Bobin, A. (2024). *Secondary k-Range Symmetric Neutrosophic Fuzzy Matrices*. *International Journal of Neutrosophic Science*, 23(4), 23–28.
 24. Meenakshi.A.R., *Fuzzy matrix – Theory and its applications*, MJP Publishers (2008)
 25. Anandhkumar, M., Bobin, A., Chithra, S. M., & Kamalakannan, V. (2024). *Generalized Symmetric Fermatean Neutrosophic Fuzzy Matrices*. *Neutrosophic Sets and Systems*, 70.
 26. Punithavalli, G., & Anandhkumar, M. (2024). *Kernel and k-Kernel Symmetric Intuitionistic Fuzzy Matrices*. *TWMS Journal of Applied and Engineering*

Mathematics, **14**(3), 1231–1240.

27. Prathab, H., Ramalingam, N., Janaki, E., Bobin, A., Kamalakannan, V., & Anandhkumar, M. (2024). *Interval Valued Secondary k-Range Symmetric Fuzzy Matrices with Generalized Inverses*. IAENG International Journal of Computer Science, **51**(12), 2051–2066.
28. Anandhkumar, M., Prathap, S., Ambrose Prabhu, R., Tharaniya, P., Thirumalai, K., & Kanimozhi, B. (2025). *Determinant Theory of Quadri-Partitioned Neutrosophic Fuzzy Matrices and Its Application to Multi-Criteria Decision-Making Problems*. Neutrosophic Sets and Systems, **79**.
29. Radhika, K., Senthil, S., Kavitha, N., Jegan, R., Anandhkumar, M., & Bobin, A. (2025). *Interval Valued Secondary k-Range Symmetric Quadri Partitioned Neutrosophic Fuzzy Matrices with Decision Making*. Neutrosophic Sets and Systems, **78**.
30. Harikrishnan, T., Anandhkumar, M., Prathap, S., Subramanian, S., Ramesh, D., & Raji, M. (2025). *Min(Max)–Min(Max)–Max(Min) (*): Compositions of Neutrosophic Fuzzy Matrices and Its Application in Medical Diagnosis*. Neutrosophic Sets and Systems, **86**.